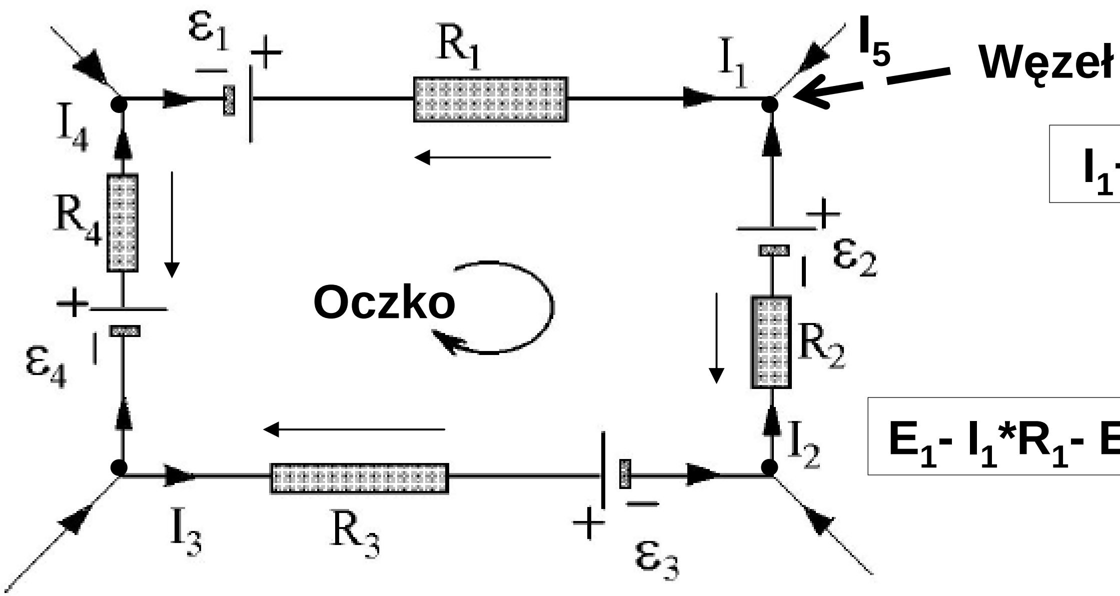
Obwody rozgałęzione. Prawa Kirchhoffa



$I_1+I_2+I_5=0$

$E_1- I_1*R_1- E_2+ I_2*R_2+E_3+ I_3*R_3+E_4- I_4*R_4=0$

Pierwsze prawo Kirchhoffa.
Suma natężeń prądów wchodzących do węzła sieci elektrycznej jest równa sumie natężeń prądów wychodzących z punktu węzłowego.

Drugie prawo Kirchhoffa.
Suma sił elektromotorycznych w oczku jest równa sumie spadków napięć na wszystkich rezystorach w tym oczku:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{j=1}^{m} (I_j \cdot R_j)$$

Metoda praw Kirchhoffa

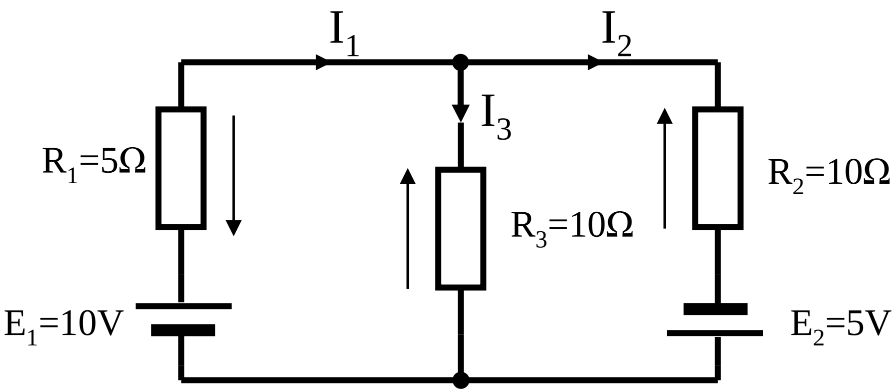
W ogólnym przypadku w każdej gałęzi obwodu płynie inny prąd, z czego wynika że liczba prądów jest równa liczbie gałęzi obwodu. Do obliczenia tych prądów należy ułożyć tyle niezależnych równań, ile dany obwód ma gałęzi. Korzysta się tu z zależności, jaka zachodzi między liczbą gałęzi ***g***, liczbą węzłów ***w*** oraz liczbą oczek ***o*** obwodu w postaci **g=(w-1)+o**

Tok obliczeń jest następujący:

1. Strzałkuje się dowolnie prądy we wszystkich gałęziach obwodu.
2. Strzałkuje się napięcia (przeciwnie do strzałki prądu) na wszystkich elementach rezystancyjnych oraz źródła napięcia.
3. Układa się (*w-1*) równań gałęziowych według pierwszego prawa Kirchhoffa opuszczając jeden dowolny węzeł.
4. Układa się tyle równań według drugiego prawa Kirchhoffa ile dany obwód zawiera oczek.
5. Rozwiązuje się powyższy układ ze względu na nieznane prądy gałęziowe.

Zaletą metody równań Kirchhoffa jest duża prostota w trakcie układania równań, natomiast wadą jest duża pracochłonność przy ich rozwiązywaniu.

Rozwiązywanie obwodu metodą praw Kirchhoffa



$I_1=I_2+I_3$
$E_1-I_1*R_1-I_3*R_3=0$
$I_3*R_3-I_2*R_2+E_2=0$

$E_1-(I_2+I_3)*R_1-I_3*R_3=0$
$E_2+I_3*R_3-I_2*R_2=0$

$E_1-I_2*R_1-I_3*R_1-I_3*R_3=0$
$E_2-I_2*R_2+I_3*R_3=0$

$E_1-I_2*R_1-I_3*(R_1-R_3)=0$
$E_2-I_2*R_2+I_3*R_3=0 \quad \Rightarrow \quad I_2=(E_2+I_3*R_3)/R_2$

$$E_1-\frac{E_2+I_3\cdot R_3}{R_2}\cdot R_1-I_3\cdot(R_1+R_3)=0$$

$$E_1-E_2\cdot\frac{R_1}{R_2}-I_3\cdot\frac{R_3\cdot R_1}{R_2}-I_3\cdot(R_1+R_3)=0$$

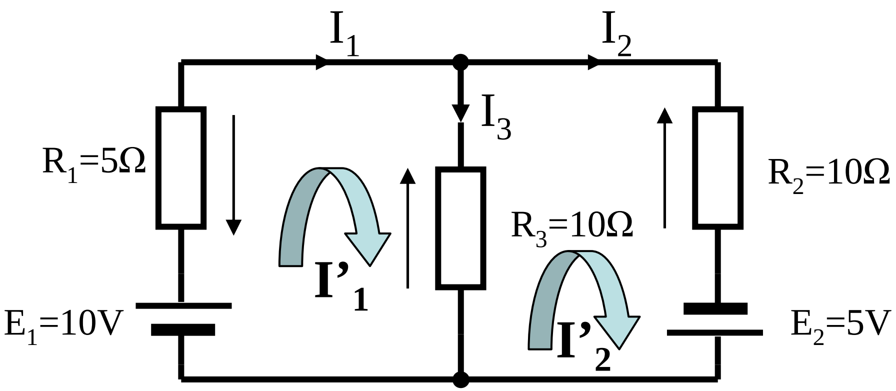
$$E_1-E_2\cdot\frac{R_1}{R_2}=I_3\cdot\left(\frac{R_1\cdot R_3}{R_2}+R_1+R_3\right)$$

$$I_3=\frac{E_1\cdot R_2-E_2\cdot R_1}{R_1\cdot R_3+R_1\cdot R_2+R_2\cdot R_3}=\frac{10\cdot 10-5\cdot 5}{5\cdot 10+5\cdot 10+5\cdot 5}=\frac{75}{200}=0{,}375A$$

$$I_2=\frac{5+0{,}375\cdot 10}{10}=0{,}875A$$

$$I_1=0{,}375+0{,}875=1{,}25A$$

Metoda oczkowa



W rozpatrywanym obwodzie wprowadzamy *prądy oczkowe*, krążące jak gdyby wzdłuż poszczególnych oczek obwodu.

Najwygodniej jest przyjąć, że zwroty prądów oczkowych są takie same we wszystkich oczkach, na przykład są zgodne z ruchem wskazówek zegara. Prądy w gałęziach zewnętrznych obwodu, tj. w gałęziach nie będących wspólnymi dla dwóch oczek, są równe odpowiednim prądom oczkowym. Prądy w gałęziach wspólnych dla dwóch oczek równają się różnicy odpowiednich prądów oczkowych.

$$E_1 - I_1' \cdot (R_1 + R_3) + I_2' \cdot R_3 = 0$$
$$I_1' \cdot R_3 - I_2' \cdot (R_3 + R_2) + E_2 = 0$$

$$I_1' = \frac{E_1 + I_2' \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

$$\frac{E_1 + I_2' \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot R_3 - I_2' \cdot (R_3 + R_2) + E_2 = 0$$

$$E_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} + I_2' \cdot \frac{R_3^2}{R_1 + R_3} - I_2' \cdot (R_2 + R_3) + E_2 = 0$$

$$I_2' \cdot \left(\frac{R_3^2}{R_1 + R_3} - R_2 - R_3 \right) + E_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} + E_2 = 0$$

$$I_2' \cdot \left(\frac{R_3^2 - R_1R_2 - R_1R_3 - R_2R_3 - R_3^2}{R_1 + R_3} \right) + E_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} + E_2 = 0$$

$$E_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} + E_2 = I_2' \cdot \left(\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_3} \right)$$

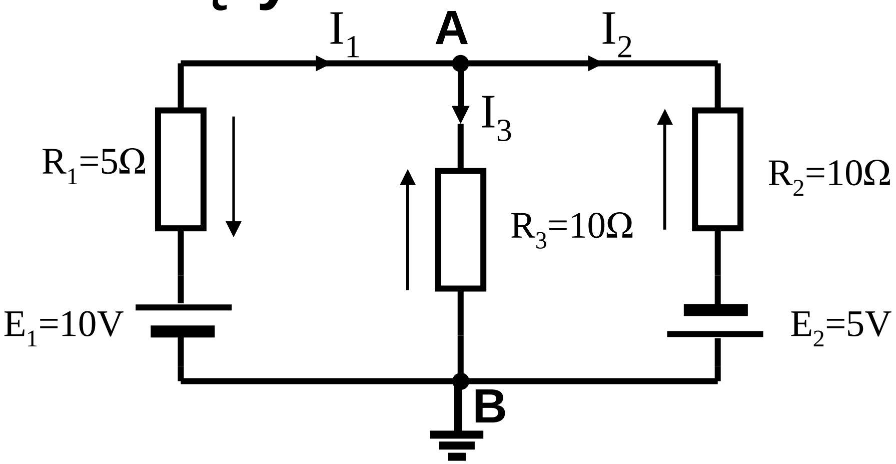
$$I_2' = \frac{E_1R_3 + E_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$I_2' = \frac{10 \cdot 10 + 5 \cdot (5 + 10)}{5 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 10} = \frac{175}{200} = 0{,}875A$$

$$I_1' = \frac{10 + 0{,}875 \cdot 10}{5 + 10} = 1{,}25A$$

$$I_1 = I_1' = 1{,}25A$$
$$I_2 = I_2' = 0{,}875A$$
$$I_3 = I_1' - I_2' = 0{,}375A$$

Rozwiązywanie obwodów metodą potencjałów węzłowych



$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{E_1 - V_A}{R_1} \qquad I_2 = \frac{E_2 + V_A}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_A}{R_3}$$

$$\frac{E_1 - V_A}{R_1} = \frac{E_2 + V_A}{R_2} + \frac{V_A}{R_3}$$

$$\frac{E_1}{R_1} - \frac{V_A}{R_1} = \frac{V_A}{R_2} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{V_A}{R_3}$$

$$\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} = \frac{V_A}{R_1} + \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A}{R_3}$$

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$V_A = \frac{\frac{10}{5} - \frac{5}{10}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{1{,}5}{\frac{4}{10}} = 3{,}75\,V$$

$$I_1 = \frac{10 - 3{,}75}{5} = 1{,}25\ A$$

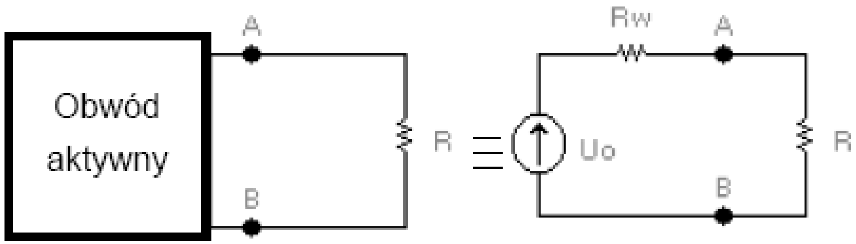
$$I_2 = \frac{3{,}75 + 5}{10} = 0{,}875\ A$$

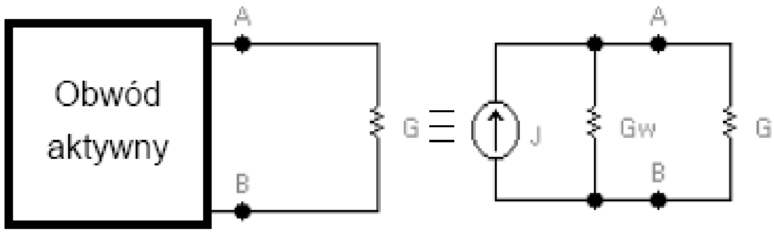
$$I_1 = \frac{3{,}75}{10} = 0{,}375\ A$$

Tok obliczeń prądów gałęziowych jest następujący:

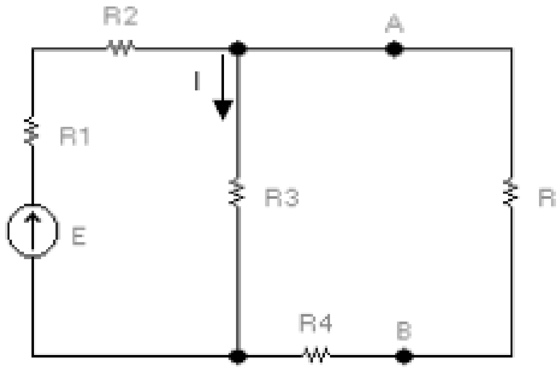
1. Strzałkuje się dowolnie prądy we wszystkich gałęziach obwodu.
2. Strzałkuje się napięcia (przeciwnie do strzałki prądu) na wszystkich elementach rezystancyjnych obwodu.
3. Oznacza się potencjały węzłów, przyjmując potencjał jednego dowolnego węzła równy zeru (węzeł odniesienia).
4. Układa się równania węzłowe dla (*w-1*) węzłów obwodu, opuszczając węzeł odniesienia.
5. Rozwiązuje się powyższy układ równań ze względu na potencjały węzłowe.
6. Oblicza się napięcia występujące na poszczególnych gałęziach wzorem $\underline{U}_{kl}=\underline{V}_k-\underline{V}_l$.
7. Prądy gałęziowe wyznacza się z prawa Ohma.

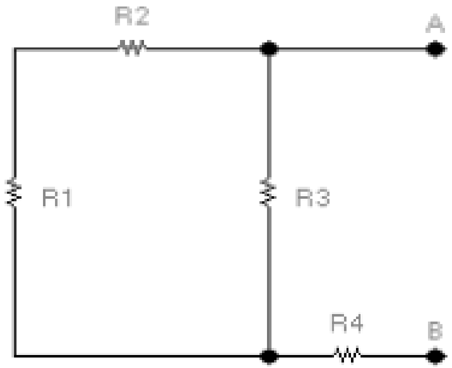
Metoda źródła zastępczego. Twierdzenie Thevenina i Nortona

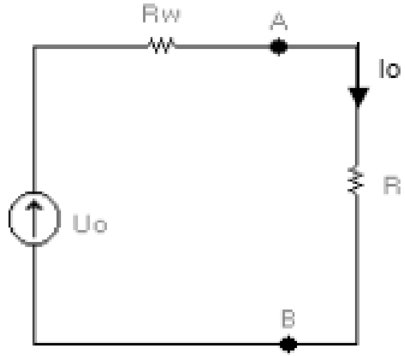




Rozwiązywanie obwodu metodą Thevenina

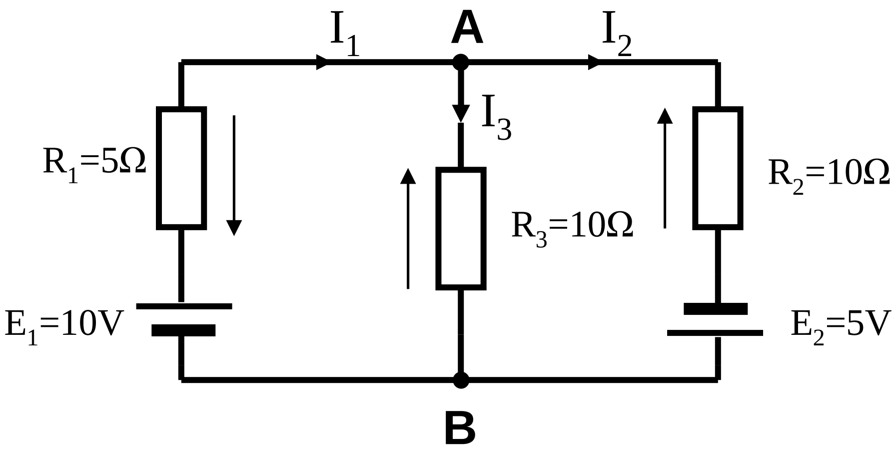






Każdy liniowy dwójnik aktywny można przedstawić w postaci źródła napięcia o sile elektromotorycznej równej napięciu między rozwartymi zaciskami wyjściowymi dwójnika aktywnego. Rezystancja wewnętrzna tego źródła jest równa rezystancji tego dwójnika po usunięciu wszystkich źródeł energii.

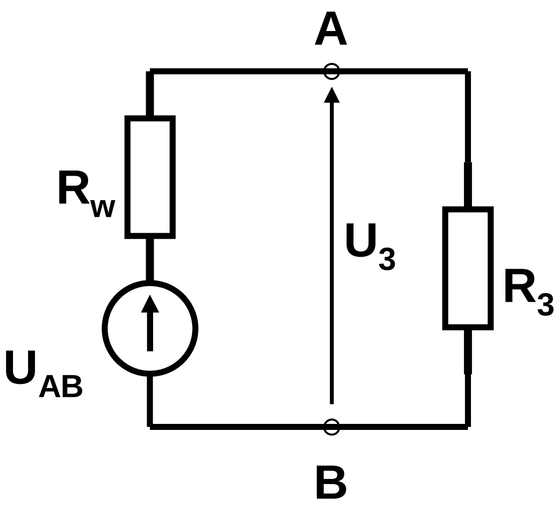
Rozwiązywanie obwodu metodą Thevenina



Rozwieramy zaciski A i B

$$U_{AB} = E_1 - I_1 \cdot R_1 = E_1 - \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} \cdot R_1$$

$$U_{AB} = 10 - \frac{10+5}{5+10} \cdot 5 = 5\,V$$

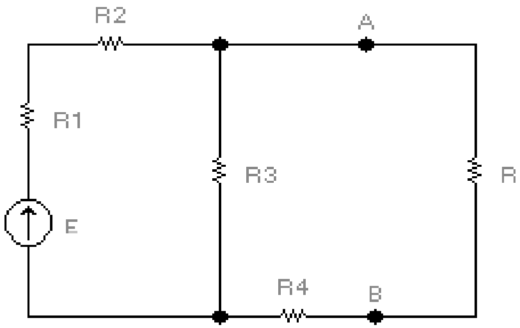


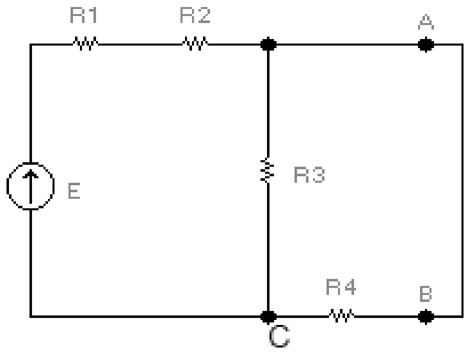
Likwidujemy źródła napięa

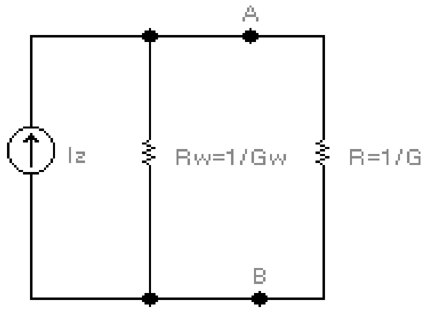
$$R_w = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 10}{5+10} = 3\frac{1}{3}\,\Omega$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_w + R_3} = \frac{5}{3\frac{1}{3} + 10} = \frac{15}{40} = 0{,}375\,A$$

Rozwiązywanie obwodu metodą Nortona



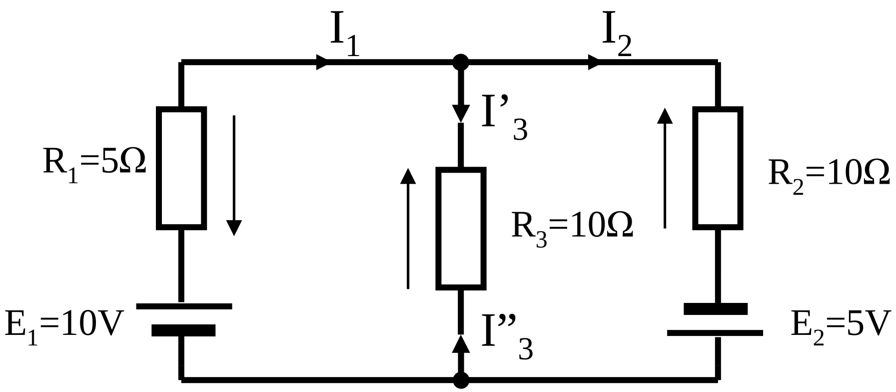




Twierdzenie Nortona

Każdy liniowy dwójnik aktywny można przedstawić w postaci źródła prądu. Prąd źródłowy tego źródła równy jest prądowi płynącemu w bezoporowym przewodzie zwierającym zaciski dwójnika aktywnego, zaś rezystancja wewnętrzna tego źródła jest równa rezystancji tego dwójnika po usunięciu wszystkich źródeł energii.

Zasada superpozycji



Odpowiedź liniowego układu fizycznego, obwodu elektrycznego lub jego gałęzi na kilka wymuszeń, równa się sumie odpowiedzi na każde wymuszenie z osobna.

$$I_3 = I_3' - I_3''$$

$$Zakladamy \;\; E_2 = 0$$

$$I_3' = \frac{U_{AB}'}{R_3} = \frac{E_1 - E_1 \cdot \dfrac{R_1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}}{R_3}$$

$$I_3' = 10 \cdot \frac{1 - \dfrac{5}{5 + \dfrac{10 \cdot 10}{10 + 10}}}{10} = 0{,}5\ A$$

$$Zakladamy \; E_1 = 0$$

$$I_3'' = \frac{U_{AB}''}{R_3} = \frac{E_2 - E_2 \cdot \dfrac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}}{R_3}$$

$$I_3'' = 5 \cdot \frac{1 - \dfrac{10}{10 + \dfrac{5 \cdot 10}{5 + 10}}}{10} = 0{,}125\ A$$

$$I_3 = 0{,}5 - 0{,}125 = 0{,}375\ A$$