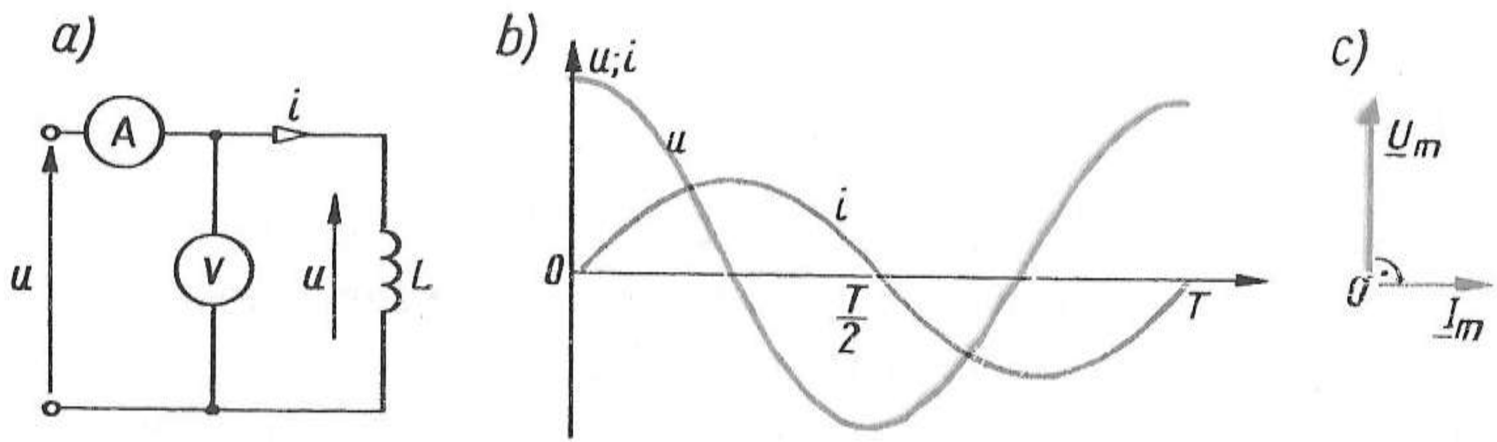
Lekcja 88. Cewka zasilana prądem sinusoidalnym

Napięcie na cewce idealnej wyraża się wzorem (14.20)

$$u = L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

a więc zależy nie bezpośrednio od prądu, lecz od jego zmiany w czasie.



Rys. 18.3

Cewka indukcyjna idealna zasilana prądem sinusoidalnym: ***a*) schemat obwodu; *b*) przebiegi prądu i napięcia; *c*) wykres wektorowy amplitudowy**

Przyjmijmy, że przez cewkę płynie prąd sinusoidalny

$$i = I_m \sin\omega t$$

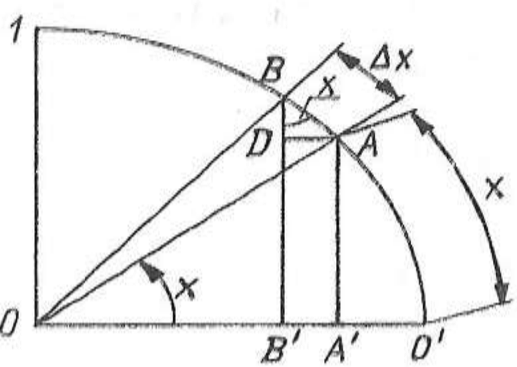
Zmiana prądu Δi jest równa iloczynowi amplitudy I_m i zmiany funkcji sinusoidalnej $\Delta(\sin\omega t)$

$$\Delta i = I_m \Delta(\sin\omega t) \tag{18.6}$$

a napięcie

$$u = L I_m \frac{\Delta(\sin\omega t)}{\Delta t} \tag{18.7}$$

Aby obliczyć wyrażenie $\frac{\Delta(\sin\omega t)}{t}$ oznaczymy $\omega t = x$ i posłużymy się metodą graficzną. Na rys. 18.4 przedstawiono koło o promieniu jednostkowym. Na tym kole odmierzono dowolny kąt $x = OA$ w mierze łukowej i mały przyrost kąta $\Delta x = AB$.



Rys. 18.4
Rysunek objaśniający obliczanie $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ przy sinusoidalnym przebiegu $i = I_m \sin\omega t$

Sinus kąta x jest na rys. 18.4 równy odcinkowi AA', a sinus kąta $(x+\Delta x)$ jest równy odcinkowi BB'. Przyrost funkcji sin x jest więc równy różnicy odcinków BB' i AA', tj. odcinkowi BD

$$\Delta (\sin x) = BD$$

Na tym samym rysunku długość łuku $\Delta x = AB$. Przy bardzo małej długości łuku można go zastąpić cięciwą. Tak otrzymujemy trójkąt prostokątny ABD, z którego wynika, że

$$\frac{BD}{AB} = \frac{\Delta (\sin x)}{x} = \cos x \qquad (18.8)$$

Jeżeli uwzględnimy, że $x = \omega t$ oraz $\Delta x = \Delta(\omega t) = \omega \Delta t$, to obliczymy

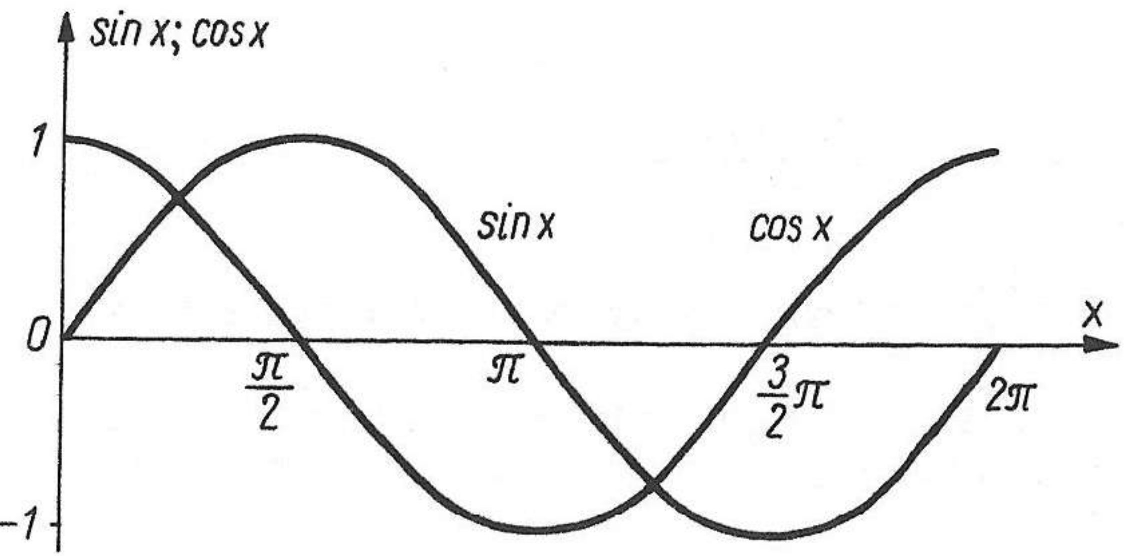
$$\frac{\Delta (\sin \omega t)}{\Delta (\omega t)} = \frac{\Delta (\sin \omega t)}{\omega \Delta t} = \cos \omega t$$

a następnie

$$\frac{\Delta(\sin \omega t)}{\Delta t} = \omega \cos \omega t \tag{18.9}$$

Wyrażenie to podstawiamy do wzoru (18.7) i otrzymujemy przebieg napięcia na cewce

$$u = \omega L I_m \cos \omega t \tag{18.10}$$



Rys. 18.5
Sinusoida i kosinusoida

Funkcja kosinusoidalna ma przebieg podobny do przebiegu funkcji sinusoidalnej, lecz przesunięty o $\pi/2$, tj. o $90°$ Wykresy funkcji $\sin x$ i $\cos x$ przedstawiono na rys. 18.5. Jak widać z wykresu

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 90°) \tag{18.11}$$

Przepiszmy wzory na i oraz na u i porównajmy je

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90°) \tag{18.12}$$

$$U = \omega L I \tag{18.14}$$

Wymiarem ωL jest, jak łatwo sprawdzić, om

$$1\,[\omega L] = 1\ \mathrm{s}^{-1}\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}} = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 1\ \Omega$$

Wyrażenie ωL przedstawia zatem opór indukcyjny cewki. Nazywamy go reaktancją indukcyjną i oznaczamy literą X ze wskaźnikiem L u dołu

$$X_L = \omega L \tag{18.15}$$

Reaktancja indukcyjna jest równa iloczynowi pulsacji ω i indukcyjności L.

Wartość skuteczna napięcia na cewce indukcyjnej jest przy prądzie sinusoidalnym równa iloczynowi reaktancji cewki i wartości skutecznej prądu.

Z porównania przebiegów prądu i napięcia

$$i = I_m \sin\omega t$$

$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90°) = U_m \sin(\omega t + 90°)$$

wynika, że faza napięcia jest o 90° większa od fazy prądu, tzn., że faza napięcia na cewce wyprzedza o 90° fazę prądu, albo, jak często się wyrażamy, prąd opóźnia się w fazie o 90° względem napięcia na cewce.

Kąt przesunięcia fazowego w cewce idealnej

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90° \qquad (18.16)$$

Przykład 18.2

Przez cewkę idealną o indukcyjności $L = 0{,}127$ H przepływa prąd $i = 7{,}07 \sin 314\, t$. Obliczyć wartości skuteczne prądu i napięcia na cewce oraz przebieg czasowy napięcia.

Rozwiązanie

Reaktancja indukcyjna cewki $\omega L = 314 \cdot 0{,}127 = 40\ \Omega$

Wartość skuteczna prądu $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{7{,}07}{1{,}414} = 5$ A

Wartość skuteczna napięcia $U = \omega L I = 40 \cdot 5 = 200$ V

Amplituda napięcia $U_m = \sqrt{2}\, U = 283$ V

Przebieg napięcia $u = 283 \sin (314\, t + \pi/2)$

Należy zaznaczyć, że zapis $\pi/2$ jest tu poprawniejszy niż $90°$, bo $\omega t = 314\, t$ jest wyrażone w radianach. Jeżeli jednak zapiszemy $90°$, ale będziemy pamiętać, że tego bezpośrednio nie można dodawać, to nie popełnimy błędu.